

Etapă locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026. Clasa a IX-a (Barem de notare și evaluare)

○ *Orice soluție corectă, diferită de cea sugerată în barem, se punctează corespunzător.*

	Din oficiu.	10 p
1.	(a) Inegalitatea propusă se poate scrie $\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} \geq \frac{x + y}{xy}$ sau $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$,	4 p
	adică $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq xy(x + y)$;	4 p
	cum $x, y > 0$, aceasta este echivalentă cu $(x - y)^2 \geq 0$, adevărat.	4 p
	(b) Inegalitatea de la (a) conduce la $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ și celelalte două analoge; prin însumarea acestora se obține $\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} = 6$. Observație: dacă elevii folosesc $a = b = c = 1$ punctajul este nul.	10 p
	Total Problema 1.	22 p
2.	(a) Evident $\frac{VB}{VD} = 1$, iar din $\frac{AB}{UB} = 3$ rezultă $\frac{UA}{UB} = 2$.	6 p
	Teorema lui Menelaus pentru triunghiul ADB și transversala $U - V - T$ conduce la $\frac{UA}{UB} = \frac{TA}{TD} = k$, deci $k = 2$. <i>Observație:</i> Se poate oferi și o soluție mult mai elementară, doar cu paralelism, etc.	6 p
	(b) Deoarece în cazul de față D este mijlocul lui AT , V este mijlocul lui AC , rezultă că S este centrul de greutate al triunghiului ATC și egalitatea din concluzie este evidentă.	10 p
	Total Problema 2.	22 p
3.		
	Notăm $[x] = n \in \mathbb{Z}, \{x\} = t \in [0, 1)$, așadar $2n + t = 5t$, deci $n = 2t \in [0, 2)$, de unde $n = 0$ sau $n = 1$.	13 p
	Dacă $n = 0$ se obține soluția $x = 0$, iar dacă $n = 1$ se obține soluția $x = \frac{3}{2}$.	10 p
	Total Problema 3.	23 p

4.	(a) de exemplu: $2 \cdot 30 - 3 \cdot 20 = 0 \in \mathcal{A}$, deci $20 \in \mathcal{A}$ și $2 \cdot 3039 - 3 \cdot 2026 = 0 \in \mathcal{A} \Rightarrow 2026 \in \mathcal{A}$	10 p
	(b) $2 \cdot 3n - 3 \cdot 2n = 0 \in \mathcal{A} \Rightarrow 3n \in \mathcal{A}, 2n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{Z}$, deci și $3 \in \mathcal{A}$. Cum $3 = 2 \cdot (3n + 3) - 3 \cdot (2n + 1) \in \mathcal{A}$ rezultă $(2n + 1) \in \mathcal{A}$, așadar $\mathbb{Z} \subset \mathcal{A}$	8 p
	Pe de altă parte avem și $0 = 2 \cdot (3\sqrt{2}) - 3 \cdot (2\sqrt{2}) \in \mathcal{A}$, deci $2\sqrt{2} \in \mathcal{A} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	5 p
	Total Problema 4.	23 p